Examen la geometrie. Varianta 10

Partea I. Încercuiţi răspunsurile corecte la întrebările de mai jos.

1. Se consideră $\mathbb{R}^2$ cu structura canonică de $\mathbb{R}-$spaţiu vectorial. Care dintre următoarele submulţimi sunt subspaţii vectoriale

a) $\{(x,y)|x \in \mathbb{Z}\}$. b). $\{(x,2x-3)|x \in \mathbb{R}\}$. c) $\{(x,y)|2x-y=3\}$ d) $\{(x,y)|2x-3y=0\}$. (**5 puncte**).

2. Fie K un corp, V, W două $K-$spaţii vectoriale, $f: V \to W$ o aplicaţie liniară. Dacă $dim_K(V)=3, dim_K(W)=3$ şi $dim_K(Im(f))=3$ atunci:

a) $dim_K(Ker(f))=3$. b) $dim_K(Ker(f))=0$. c) f este injectivă. d) f este surjectivă. (**5 puncte**).

3. Fie K un corp, V un $K-$spaţiu vectorial de dimensiune 4 şi $U, W \subset V$ subspaţii vectoriale a. î. $dim_K(U)=2, dim_K(W)=3, dim_K(U+W)=3$. Atunci

a) $dim_K(U \cap W)=1$. b) $dim_K(U \cap W)=2$. c) suma $U+W$ este directă. d) $U \subset W$. (**5 puncte**).

4. Forma pătratică $x^2-2xy+y^2+2z^2+4yz$ poate fi adusă (prin transformări afine, în spaţiul afin tridimensional real) la forma canonică:

a) $x^2+2y^2-2z^2$; b) $x^2+y^2+2z^2$ c) $x^2+4yz+2z^2$ d) $x^2+y^2-z^2$.(**5 puncte**)

Partea II. Pe foile de rezolvare treceţi soluţiile complete.

1. Fie $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(X)=AX$ unde $A=\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

a). Arătaţi că f este $\mathbb{R}-$liniară. (**5 puncte**).

b) Determinaţi $Ker(f)$ şi $Im(f)$ (ecuaţii, baze, dimensiuni).(**10 puncte**).

c). Determinaţi valorile proprii şi decideţi dacă f este diagonalizabilă. (**10 puncte**).

2. Fie E_3 spaţiul vectorial euclidian $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar canonic.

a) Fie $u=(1,0,1), v=(-1,-2,3)$; calculaţi $||u||$ precum şi $\cos(\widehat{u,v})$; (**10 puncte**).

b). Aplicaţi algoritmul Gramm-Schmidt sistemului (e_1,u,v) (unde $e_1=(1,0,0)$).(**15 puncte**)

3. Fie K un corp ($char(K) \neq 2$) şi

$$Q(K)=\{(x,y) \in K^2 | x^2+2x+y^2+4y+17=0.\}$$

a) Arătaţi că $Q(\mathbb{R})=\emptyset$ şi că $Q(\mathbb{C})$ este mulţime infinită. (**10 puncte**)

b). Exista p număr prim $p>2$ astfel încât $Q(\mathbb{F}_p)=\emptyset$? Justificare ($\mathbb{F}_p$ =corpul cu p elemente). (**10 puncte**)